九州大学（理系）前期日程 数学 解答速報

$\boxed{1}$ 座標空間内で，原点 O を中心とする半径 3 の球を S とする。また，点 $\mathrm{P}\left(1,\ 0,\ \sqrt{3}\right)$ を考え，T_1 と T_2 を直線 OP と直交する相異なる 2 つの平面とする。T_1 と S の共通部分を C_1，T_2 と S の共通部分を C_2 とし，次の 2 つの条件をみたすとする。

・C_1 と C_2 はどちらも半径 1 の円である。

・C_1 の中心の z 座標は正で，C_2 の中心の z 座標は負である。

以下の問いに答えよ。

(1) 円 C_1，C_2 の中心の座標を求めよ。

(2) 円 C_1，C_2 を底面とする円柱の側面を平面 $z=0$ で切る。その切り口の曲線の方程式を求めよ。また，その曲線を図示せよ。

（2026 年度　九州大学　理系　前期日程）

(1) 円 C_1，C_2 の中心をそれぞれ $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$ とする。円 C_1 上の点 B について，

$$\mathrm{OB}=3,\quad \mathrm{A_1B}=1,\quad \mathrm{OA_1}\perp\mathrm{A_1B}$$

より，

$$\begin{aligned}\mathrm{OA_1}&=\sqrt{\mathrm{OB}^2-\mathrm{A_1B}^2}\\&=\sqrt{3^2-1^2}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

$\mathrm{A_2}$ についても同様に，

$$\mathrm{OA_2}=2\sqrt{2}$$

また，

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}&=\sqrt{1^2+0^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\\&=2\end{aligned}$$

2 点 $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{A_2}$ は直線 OP 上にあり，これと z 座標の符号の条件より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}&=\frac{\mathrm{OA_1}}{\mathrm{OP}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\frac{2\sqrt{2}}{2}\left(1,\ 0,\ \sqrt{3}\right)\\&=\left(\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{6}\right)\\\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}&=-\frac{\mathrm{OA_2}}{\mathrm{OP}}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=-\frac{2\sqrt{2}}{2}\left(1,\ 0,\ \sqrt{3}\right)\\&=\left(-\sqrt{2},\ 0,\ -\sqrt{6}\right)\end{aligned}$$

よって，円 C_1 の中心の座標は $\left(\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{6}\right)$，円 C_2 の中心の座標は $\left(-\sqrt{2},\ 0,\ -\sqrt{6}\right)$ である。

(2)　題意の切り口の曲線上の点を $\mathrm{Q}(x,\ y,\ 0)$ とおく。点 Q と直線 OP の距離は，円 C_1，C_2 の半径 1 であることと，$\mathrm{OP}=2$ より，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S とすると，点 Q の位置によらず，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

一方，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 4$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = x^2 + y^2$$
$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= \left(1,\ 0,\ \sqrt{3}\right)\cdot(x,\ y,\ 0) \\ &= x \end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{4(x^2+y^2)-x^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3x^2+4y^2} \end{aligned}$$

よって，

$$\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+4y^2} = 1$$
$$3x^2 + 4y^2 = 4$$
$$\therefore\quad \frac{3}{4}x^2 + y^2 = 1$$

また，xz 平面と円 C_1 の共有点を R とし，$\overrightarrow{\mathrm{A_1R}} = (X,\ 0,\ Z)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{A_1R}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A_1R}} = 0$$
$$\left(1,\ 0,\ \sqrt{3}\right)\cdot(X,\ 0,\ Z) = 0$$
$$\therefore\quad X + \sqrt{3}Z = 0$$

また，$\mathrm{A_1R} = 1$ より，

$$X^2 + Z^2 = 1$$

よって，

$$(X,\ Z) = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \mp\frac{1}{2}\right)\quad\text{（複号同順）}$$
$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{A_1R}} = \left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \mp\frac{1}{2}\right)\quad\text{（複号同順）}$$

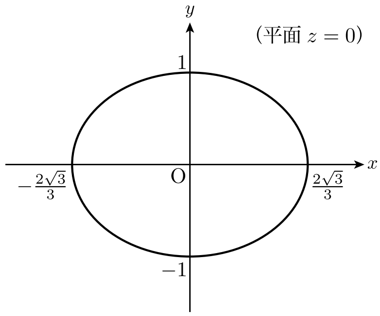
これと $\mathrm{A_1}\left(\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{6}\right)$ より，円 C_1 上の点の z 座標について，

$$\sqrt{6} - \frac{1}{2} \leqq z \leqq \sqrt{6} + \frac{1}{2}$$

よって，円 C_1 は平面 $z=0$ と共有点をもたない。円 C_2 についても同様であるため，求める切り口の曲線の方程式は，

$$\frac{3}{4}x^2 + y^2 = 1\quad\text{かつ}\quad z = 0$$

であり，図の太線部である。



$\boxed{2}$ 点 z が複素数平面上の線分

$$z = t + ti \quad \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \leqq t \leqq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)$$

の上を動くとき，

$$z^2 - wz + 1 = 0$$

をみたす複素数 w を表す点が描く軌跡を C とする。ただし，i は虚数単位である。以下の問いに答えよ。

(1) 軌跡 C を複素数平面上に図示せよ。

(2) $t = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ のときに複素数 w を表す点を P_1 とし，$t = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ のときに複素数 w を表す点を P_2 とする。このとき，軌跡 C，線分 OP_1，線分 OP_2 で囲まれる領域を虚軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし，O は複素数平面の原点である。

(2026 年度　九州大学　理系　前期日程)

(1) $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} > 0$ より，

$$z \neq 0$$

よって，

$$z^2 - wz + 1 = 0 \iff w = z + \frac{1}{z}$$

$z = t + ti$ より，

$$\begin{aligned} w &= t + ti + \frac{1}{t+ti} \\ &= t + ti + \frac{1-i}{2t} \\ &= t + \frac{1}{2t} + \left(t - \frac{1}{2t} \right) i \end{aligned}$$

と表せる。$w = x + yi$（x，y は実数）とおき，xy 平面上で考えると，

$$x = t + \frac{1}{2t}, \quad y = t - \frac{1}{2t}$$

であり，

$$x + y = 2t, \quad x - y = \frac{1}{t}$$

なので，

$$(x+y)(x-y) = 2t \cdot \frac{1}{t}$$

$$\therefore \quad x^2 - y^2 = 2$$

また，$t > 0$ より，

$$x = t + \frac{1}{2t} > 0$$

であり，

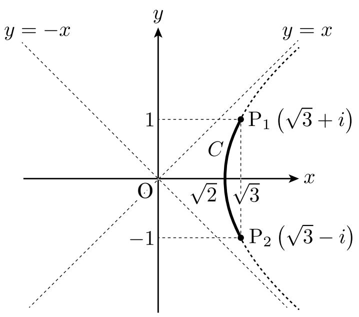
$$\frac{dy}{dt} = 1 + \frac{1}{2t^2} > 0$$

より，y は t に対して単調に増加し，

$$t = \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \text{ のとき，} (x,\ y) = \left(\sqrt{3},\ -1 \right)$$

$$t = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ のとき，} (x,\ y) = \left(\sqrt{3},\ 1 \right)$$

よって，軌跡 C は双曲線 $x^2 - y^2 = 2$ の $\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{3}$ の部分であり，図の太線部。



(2)　(1) 同様に，xy 平面上で考える。

$$\mathrm{OP_1} : y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$
$$\mathrm{OP_2} : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

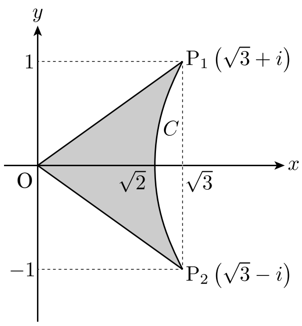
線分 $\mathrm{OP_1}$ と軌跡 C の共有点について，

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x \end{cases}$$

の連立方程式を解くと，

$$x^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^2 = 2$$
$$(x,\ y) = \left(\pm\sqrt{3},\ \pm 1\right) \quad \text{（複号同順）}$$

$x > 0$ より，共有点は $\mathrm{P_1}$ のみ。線分 $\mathrm{OP_2}$ についても，x 軸についての対称性より，共有点は点 $\mathrm{P_2}$ のみ。よって，軌跡 C，線分 $\mathrm{OP_1}$，$\mathrm{OP_2}$ で囲まれる領域は図の通り。



軌跡 C と直線 $y = \pm 1$，y 軸で囲まれる領域を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_1，底面の半径が $\sqrt{3}$，高さが 1 の円錐の体積を V_2 とすると，

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-1}^{1} x^2 dy \\ &= \pi \int_{-1}^{1} (y^2 + 2) dy \quad (\because x^2 - y^2 = 2) \\ &= 2\pi \int_{0}^{1} (y^2 + 2) dy \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{3}y^3 + 2y\right]_0^1 \\ &= \frac{14}{3}\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot 1 \\ &= \pi \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} V &= V_1 - 2V_2 \\ &= \frac{14}{3}\pi - 2\pi \\ &= \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

$\boxed{3}$　$0 < r < 1$ とする。表が出る確率が r，裏が出る確率が $1-r$ の硬貨を投げ，表が出た場合は白玉を 2 つ横並びに置き，裏が出た場合は黒玉を 1 つ置く。この要領で硬貨を繰り返し投げ，左から右に 1 列になるように白玉と黒玉を順に並べていく。例えば，3 回硬貨を投げ，結果が順に「裏，表，表」であれば，左から順に「黒，白，白，白，白」と 5 つの玉が並ぶ。n を自然数とする。$n+2$ 回硬貨を投げたとき，左から n，$n+1$，$n+2$ 番目の玉がすべて黒である確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ とする。$n+2$ 回硬貨を投げたとき，左から 1，n，$n+1$，$n+2$ 番目の玉がすべて黒である確率を p_{n-1} を用いて表せ。

(3)　$n \geqq 3$ のとき，p_n を p_{n-2}，p_{n-1} を用いて表せ。

(4)　p_n を求めよ。

(2026 年度　九州大学　理系　前期日程)

(1)　3 回硬貨を投げたとき，左から 1 番目，2 番目，3 番目が黒となるのは，結果が順に「裏，裏，裏」となるときであるから，

$$p_1 = (1-r)^3$$

4 回硬貨を投げたとき，左から 2 番目，3 番目，4 番目が黒となるときを考える。

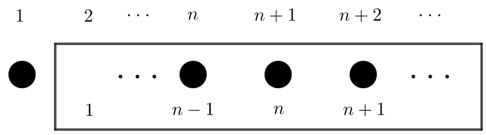
1 回目に表が出た場合，左から 2 番目は白となるため不適。よって，1 回目は裏である。

2 番目，3 番目，4 番目がすべて黒となるから，残り 3 回も裏である。

以上より，結果が順に「裏，裏，裏，裏」のときであるから，

$$p_2 = (1-r)^4$$

(2)



左から 1 番目は黒より，1 回目は裏である。

2 回目から n 回目まで硬貨を投げたときの結果は図の四角内の部分である。

四角内において左から $n-1$，n，$n+1$ 番目が黒となる確率は p_{n-1} であるから，求める確率は，

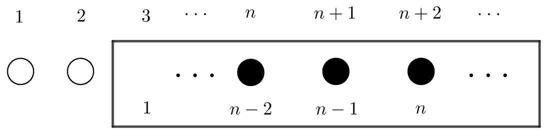
$$(1-r)p_{n-1}$$

(3)　1 回目に出た面で場合分けする。

(i)　1 回目が裏，かつ左から n，$n+1$，$n+2$ 番目がすべて黒である確率は，(2) より，

$$(1-r)p_{n-1}$$

(ii)



1 回目が表，かつ左から n，$n+1$，$n+2$ 番目がすべて黒である確率を考える。

2 回目から n 回目まで硬貨を投げたときの結果は図の四角内の部分である。

四角内において左から $n-2$，$n-1$，n 番目が黒となる確率は p_{n-2} であるから，この確率は，

$$rp_{n-2}$$

以上より，$n \geqq 3$ のとき，

$$p_n = (1-r)p_{n-1} + rp_{n-2} \cdots ①$$

(4) ① の n を $n+2$ に置き換えると，$n \geqq 1$ のとき，

$$p_{n+2} = (1-r)p_{n+1} + rp_n \cdots ②$$

② より，

$$\begin{cases} p_{n+2} - p_{n+1} = -r(p_{n+1} - p_n) & \cdots ③ \\ p_{n+2} + rp_{n+1} = p_{n+1} + rp_n & \cdots ④ \end{cases}$$

$p_1 = (1-r)^3$，$p_2 = (1-r)^4$ と ③ より，

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= (p_2 - p_1)(-r)^{n-1} \\ &= \{(1-r)^4 - (1-r)^3\}(-r)^{n-1} \\ &= (1-r)^3(-r)^n \cdots ⑤ \end{aligned}$$

$p_1 = (1-r)^3$，$p_2 = (1-r)^4$ と ④ より，

$$\begin{aligned} p_{n+1} + rp_n &= p_2 + rp_1 \\ &= (1-r)^4 + r(1-r)^3 \\ &= (1-r)^3 \cdots ⑥ \end{aligned}$$

⑤ − ⑥ より，

$$-(1+r)p_n = (1-r)^3(-r)^n - (1-r)^3$$

$-(1+r) \neq 0$ より，

$$p_n = \frac{(1-r)^3\{1-(-r)^n\}}{1+r}$$

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ。ただし，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$ が無理数であることは用いてよい。

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ を示せ。また，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数であることを示せ。

(2) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を解にもち，係数がすべて有理数の 4 次方程式を 1 つ求めよ。また，その 4 次方程式の解をすべて求めよ。

(3) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を解にもち，係数がすべて有理数の 2 次方程式は存在しないことを示せ。

（2026 年度　九州大学　理系　前期日程）

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}>0$ より，

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}$$
$$=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

となり等式はなりたつ。$\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とする。α が有理数だと仮定すると，α^2 も有理数だが，

$$\alpha^2=\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2$$
$$=5+2\sqrt{6}$$
$$\therefore \quad \sqrt{6}=\frac{\alpha^2-5}{2}$$

となり，$\sqrt{6}$ が無理数であることに矛盾する。よって，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である。

(2) $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ とすると，

$$x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$$
$$\therefore \quad \left(x-\sqrt{2}\right)^2=3$$
$$x^2-2\sqrt{2}x+2=3$$
$$2\sqrt{2}x=x^2-1$$
$$\therefore \quad \left(2\sqrt{2}x\right)^2=(x^2-1)^2\cdots①$$
$$8x^2=x^4-2x^2+1$$
$$x^4-10x^2+1=0\cdots②$$

② は $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を解にもち，係数がすべて有理数の 4 次方程式である。

また，② を解くと，② $\iff$ ① より，

$$x^2-1=\pm2\sqrt{2}x$$
$$x^2\mp2\sqrt{2}x-1=0$$
$$x=\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\quad（複号任意）$$

(3) 有理数係数の 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$$

が $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を解にもつと仮定する。これを式変形すると，

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

ここで，$p=\dfrac{b}{a}$，$q=\dfrac{c}{a}$ とすると，これらは有理数であり，

$$x^2+px+q=0\cdots③$$

③ が $x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を解にもつことより，

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2+p\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+q=0$$

$$5+2\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)p+q=0$$

$$5+q+2\sqrt{6}=-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)p$$

$$\therefore\quad \left(5+q+2\sqrt{6}\right)^2=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2p^2$$

$$q^2+10q+49+4(q+5)\sqrt{6}=5p^2+2\sqrt{6}p^2$$

$$q^2+10q+49-5p^2=(2p^2-4q-20)\sqrt{6}$$

$2p^2-4q-20\neq 0$ とすると，

$$\sqrt{6}=\frac{q^2+10q+49-5p^2}{2p^2-4q-20}$$

$q^2+10q+49-5p^2$，$2p^2-4q-20$ は有理数より，$\sqrt{6}$ が無理数であることに矛盾するため，

$$\begin{cases} q^2+10q+49-5p^2=0 & \cdots④ \\ 2p^2-4q-20=0 & \cdots⑤ \end{cases}$$

④ $\times 2+$ ⑤ $\times 5$ より，

$$2q^2-2=0$$

$$\therefore\quad q=\pm 1$$

q の値で場合分けする。

(i) $q=1$ のとき

⑤ に代入すると，

$$2p^2-4-20=0$$

$$p^2=12$$

$$\therefore\quad p=\pm 2\sqrt{3}$$

p は有理数であるから不適。

(ii) $q=-1$ のとき

⑤ に代入すると，

$$2p^2+4-20=0$$

$$p^2=8$$

$$\therefore\quad p=\pm 2\sqrt{2}$$

p は有理数より不適。

(i)，(ii) より，④，⑤ を満たす有理数 p，q は存在しないので矛盾する。

以上より，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ を解にもち，係数がすべて有理数の 2 次方程式は存在しない。

$\boxed{5}$　関数

$$f(x) = \int_x^{x+1} \log(4t^2+1)dt$$

に関して，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極値をとるときの x の値を求めよ。また，そのときの極値を求めよ。

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\{f(x) - f(x-1)\}$ を求めよ。

（2026 年度　九州大学　理系　前期日程）

以下，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ を $f'(x)$ と表す。$4t^2+1>0$ より，$f(x)$ はすべての x に対して定義される。

(1)　$f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \log(4t^2+1)dt$ より，

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log\{4(x+1)^2+1\} - \log(4x^2+1) \\ &= \log(4x^2+8x+5) - \log(4x^2+1) \\ &= \log\frac{4x^2+8x+5}{4x^2+1} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ のとき，

$$\frac{4x^2+8x+5}{4x^2+1} = 1$$

$$4x^2+8x+5 = 4x^2+1$$

$$\therefore\quad x = -\frac{1}{2}$$

$f(x)$ の増減表は次の通り。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$

また，$\log(4t^2+1)$ は偶関数より，

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log(4t^2+1)dt \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{2}} t' \log(4t^2+1)dt \\ &= 2\left\{\Big[t\log(4t^2+1)\Big]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} t\cdot\frac{8t}{4t^2+1}dt\right\} \\ &= \log 2 - 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8t^2}{4t^2+1}dt \end{aligned}$$

ここで，$2t = \tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると，

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2\cos^2\theta}$$

t	$0 \to \frac{1}{2}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

よって，

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8t^2}{4t^2+1}dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{2\cos^2\theta}d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right)d\theta \\ &= \Big[\tan\theta - \theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \log 2 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \log 2 - 2 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は極大値をもたず，$x = -\dfrac{1}{2}$ で極小値 $\log 2 - 2 + \dfrac{\pi}{2}$ をとる。

(2)　$f(x)$ は連続かつ微分可能であるため，平均値の定理より，

$$\frac{f(x)-f(x-1)}{x-(x-1)}=f'(c)\quad (x-1<c<x)$$

$$\therefore\quad f(x)-f(x-1)=f'(c)\quad (x-1<c<x)$$

を満たす実数 c が存在する。よって，

$$\begin{aligned}
&x\{f(x)-f(x-1)\}\\
&=xf'(c)\\
&=x\log\frac{4c^2+8c+5}{4c^2+1}\quad (\because (1))\\
&=x\log\left(1+\frac{8c+4}{4c^2+1}\right)\\
&=\frac{8c+4}{4c^2+1}x\log\left(1+\frac{8c+4}{4c^2+1}\right)^{\frac{4c^2+1}{8c+4}}\cdots①
\end{aligned}$$

ここで，$x\to\infty$ のとき $c\to\infty$ より，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8c+4}{4c^2+1}=\lim_{c\to\infty}\frac{\frac{8}{c}+\frac{4}{c^2}}{4+\frac{1}{c^2}}=0$$

自然対数の底の定義より，

$$\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{8c+4}{4c^2+1}\right)^{\frac{4c^2+1}{8c+4}}=\log e=1\cdots②$$

また，$x\to\infty$ のとき，$c>0$ としてよく，$c<x<c+1$ より，

$$\frac{(8c+4)c}{4c^2+1}<\frac{8c+4}{4c^2+1}x<\frac{(8c+4)(c+1)}{4c^2+1}$$

であり，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(8c+4)c}{4c^2+1}=\lim_{c\to\infty}\frac{8+\frac{4}{c}}{4+\frac{1}{c^2}}=2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(8c+4)(c+1)}{4c^2+1}=\lim_{c\to\infty}\frac{\left(8+\frac{4}{c}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)}{4+\frac{1}{c^2}}=2$$

はさみうちの原理より，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8c+4}{4c^2+1}x=2\cdots③$$

①，②，③ より，

$$\lim_{x\to\infty}x\{f(x)-f(x-1)\}=2$$