九州大学（文系）前期日程 数学 解答速報

$\boxed{1}$ 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=2x^3+3x^2-36x+1$ が極値をとるときの x の値を求めよ。また，そのときの極値を求めよ。

(2) 座標平面上の曲線 $C: y=|x^2-1|$ と，点 $(-1, 0)$ を通る傾き 1 の直線 ℓ を考える。C と ℓ で囲まれる領域の面積を求めよ。

（2026 年度　九州大学　文系　前期日程）

(1) $f(x)=2x^3+3x^2-36x+1$ を x について微分すると，

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2+6x-36 \\ &= 6(x^2+x-6) \\ &= 6(x+3)(x-2) \end{aligned}$$

よって，$f'(x)=0$ の解は，

$$x=-3,\ 2$$

ここで，

$$\begin{aligned} f(-3) &= 2\cdot(-3)^3+3\cdot(-3)^2-36\cdot(-3)+1 \\ &= -2\cdot 3^3+3^3+4\cdot 3^3+1 \\ &= (-2+1+4)\cdot 3^3+1 \\ &= 3^4+1 \\ &= 82 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 2\cdot 2^3+3\cdot 2^2-36\cdot 2+1 \\ &= 2^4+3\cdot 2^2-9\cdot 2^3+1 \\ &= 2^2(4+3-18)+1 \\ &= 4\cdot(-11)+1 \\ &= -43 \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ の増減表は次の通り。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	82 極大	↘	-43 極小	↗

以上より，関数 $f(x)$ は，

$x=-3$ のとき極大値 82，$x=2$ のとき極小値 -43

をとる。

(2) 直線 ℓ の方程式は，

$$\ell: y=x+1$$

また，

$$C: y=\begin{cases} x^2-1 & (x \leqq -1,\ 1 \leqq x) \\ -x^2+1 & (-1 \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

$y=x^2-1$ と $y=x+1$ を連立，y 消去すると，

$$\begin{aligned} &x^2-1=x+1 \\ &x^2-x-2=0 \\ &(x+1)(x-2)=0 \\ &x=-1,\ 2 \end{aligned}$$

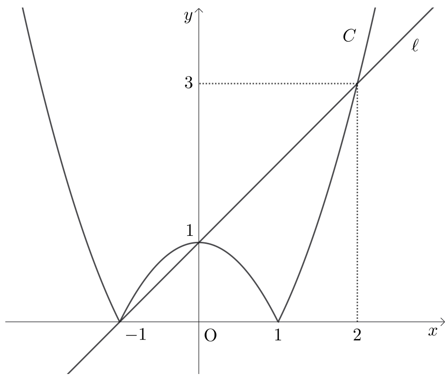
これらは，$x \leqq -1,\ 1 \leqq x$ を満たす。

$y=-x^2+1$ と $y=x+1$ を連立，y 消去すると，

$$\begin{aligned} &-x^2+1=x+1 \\ &x^2+x=0 \\ &x(x+1)=0 \\ &x=-1,\ 0 \end{aligned}$$

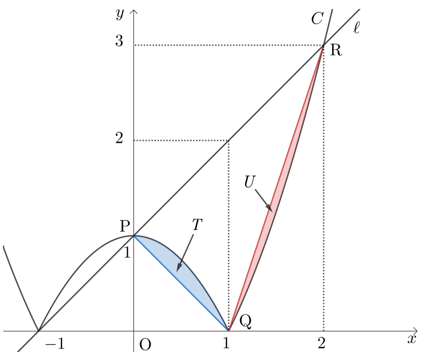
これらは，$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たす。

よって，C と ℓ の位置関係は図のようになる。



C と ℓ で囲まれる面積のうち，$-1 \leqq x \leqq 0$ の範囲にある図形の面積を S_1，$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲にある図形の面積を S_2 とすると，

$$S_1 = \int_{-1}^{0} \{-x^2 + 1 - (x+1)\}\,dx$$
$$= -\int_{-1}^{0} x(x+1)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}\{0-(-1)\}^3$$
$$= \frac{1}{6}$$



S_2 について，図の 2 つの部分の面積をそれぞれ T，U とすると，

$$T = \int_{0}^{1} \{-x^2 + 1 - (-x+1)\}\,dx$$
$$= -\int_{0}^{1} x(x-1)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}(1-0)^3$$
$$= \frac{1}{6}$$
$$U = \int_{1}^{2} \{3(x-1) - (x^2-1)\}\,dx$$
$$= -\int_{1}^{2} (x-1)(x-2)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}(2-1)^3$$
$$= \frac{1}{6}$$

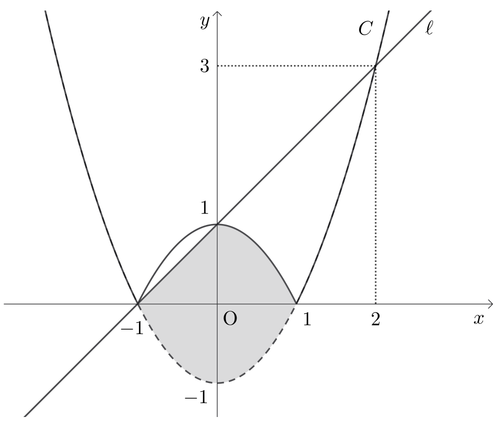
より，$T = U$ である。よって，S_2 の面積は図の三角形 PQR の面積に等しい。

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2$$
$$= 2$$

以上より，求める面積は，

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{6} + 2$$
$$= \frac{13}{6}$$

(2) （S_2 を求める部分の別解）



図の灰色部分の面積を S_3 とすると，

$$S_1 + S_3 = 2\int_{-1}^{1} (-x^2+1)\,dx$$
$$= 2\cdot\frac{1}{6}\{1-(-1)\}^3$$
$$= \frac{8}{3}$$

また，

$$S_2 + S_3 = \int_{-1}^{2} \{x + 1 - (x^2-1)\}\,dx$$
$$= \frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3$$
$$= \frac{9}{2}$$

以上より，求める面積は，

$$S_1 + S_2 = S_1 + (S_2 + S_3) - (S_1 + S_3) + S_1$$
$$= (S_2 + S_3) - (S_1 + S_3) + 2S_1$$
$$= \frac{9}{2} - \frac{8}{3} + \frac{1}{3}$$
$$= \frac{27 - 16 + 2}{6}$$
$$= \frac{13}{6}$$

$\boxed{2}$ 座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0)，A(1, 1, 1)，B(2, 2, 0)，C(4, 2, 2) と球面

$$S : (x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=1$$

を考える。3 点 A，B，C を通る平面を α とする。また，点 P は S 上にあり，以下の 2 つの条件をみたすとする。

・直線 OP は α と直交する。

・点 P の y 座標は -1 以下である。

以下の問いに答えよ。

(1) P の座標を求めよ。

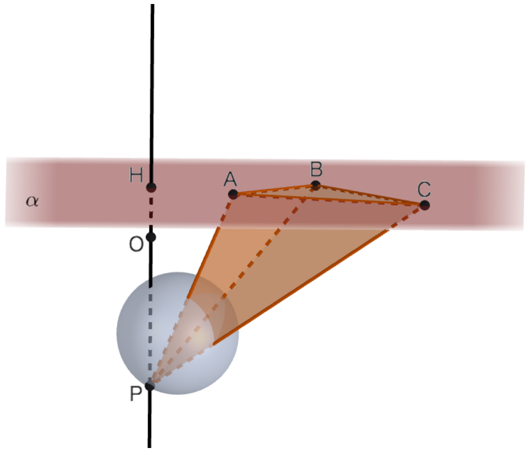
(2) P から α に下ろした垂線と α の交点を H とする。このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

をみたす実数 s，t を求めよ。

(3) 四面体 ABCP の体積を求めよ。

(2026 年度　九州大学　文系　前期日程)



(1) O は球面 S の方程式を満たさないので，O は S 上の点ではない。よって，O と P は異なる 2 点である。

P$(a,\ b,\ c)$（a，b，c は実数）とすると，P は球面 S 上より，

$$(a-1)^2+(b+1)^2+(c+1)^2=1\cdots①$$

また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(a,\ b,\ c)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=(1,\ 1,\ -1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$=(3,\ 1,\ 1)$$

直線 OP は平面 α と垂直より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が成り立つ。

よって，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\end{cases}\iff\begin{cases}a+b-c=0 & \cdots②\\ 3a+b+c=0 & \cdots③\end{cases}$$

② + ③ より，

$$4a+2b=0$$
$$b=-2a\cdots④$$

④ を ② に代入すると，

$$a+(-2a)-c=0$$
$$c=-a\cdots⑤$$

④，⑤ を ① に代入すると，

$$(a-1)^2+(-2a+1)^2+(-a+1)^2=1$$
$$6a^2-8a+2=0$$
$$3a^2-4a+1=0$$
$$(3a-1)(a-1)=0$$
$$a=\frac{1}{3},\ 1$$

ここで，P の y 座標は -1 以下より，

$$-2a\leqq-1$$
$$a\geqq\frac{1}{2}$$

よって，

$$a=1$$

以上より，

$$\mathrm{P}(1,\ -2,\ -1)$$

(2) 直線 OP は α と直交し，かつ H は P から α に下ろした垂線の足より，3 点 P，O，H は同一直線上に存在する。よって，実数 k を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = k\,\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$= (k,\ -2k,\ -k) \cdots ⑥$$

と表せる。また，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$= (1,\ 1,\ 1) + s(1,\ 1,\ -1) + t(3,\ 1,\ 1)$$
$$= (s + 3t + 1,\ s + t + 1,\ -s + t + 1) \cdots ⑦$$

⑥，⑦ の成分を比較すると，

$$\begin{cases} s + 3t + 1 = k & \cdots ⑧ \\ s + t + 1 = -2k & \cdots ⑨ \\ -s + t + 1 = -k & \cdots ⑩ \end{cases}$$

⑧ + ⑩ より，

$$4t + 2 = 0$$
$$t = -\frac{1}{2}$$

これを ⑧，⑨ に代入すると，

$$\begin{cases} s - \dfrac{1}{2} = k \\ s + \dfrac{1}{2} = -2k \end{cases} \iff \begin{cases} k = -\dfrac{1}{3} \\ s = \dfrac{1}{6} \end{cases}$$

以上より，

$$s = \frac{1}{6},\ t = -\frac{1}{2}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より，P，O，H はこの順で一直線上であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$$

よって，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}| + |\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \frac{4}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$$

ここで，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{6}$$

であるから，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PH}}| = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

また，△ABC の面積は，

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{3 \cdot 11 - 9}$$
$$= \sqrt{6}$$

以上より，求める体積を V とすると，

$$V = \frac{1}{3}\triangle \mathrm{ABC} \cdot \mathrm{PH}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{3}$$
$$= \frac{8}{3}$$

(3) （平面の方程式を利用する別解）

α は A を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を法線ベクトルの 1 つにもつから，α の方程式は，

$$(x - 1) - 2(y - 1) - (z - 1) = 0$$
$$x - 2y - z + 2 = 0$$

点と平面の距離の公式より，

$$\mathrm{PH} = \frac{|1 - 2(-2) - (-1) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}}$$
$$= \frac{8}{\sqrt{6}}$$
$$= \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

（以下省略）

3　以下の問いに答えよ。

(1)　$\sqrt{2}$ が無理数であることを示せ。

(2)　n を自然数とする。$(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n$ が整数となるための，n がみたすべき必要十分条件を求めよ。

（2026 年度　九州大学　文系　前期日程）

(1)　背理法を用いて示す。

$\sqrt{2}$ が有理数と仮定すると，$\sqrt{2}$ は互いに素な自然数 p，q を用いて，

$$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$$

と表せる。両辺を 2 乗すると，

$$2=\frac{q^2}{p^2}$$

$$2p^2=q^2\cdots①$$

$2p^2$ は偶数より，q^2 は偶数である。

q^2 が偶数かつ q は自然数より，q は正の偶数であるから，自然数 q' を用いて，

$$q=2q'$$

と表せる。これを ① に代入すると，

$$2p^2=(2q')^2$$

$$p^2=2q'^2$$

$2q'^2$ は偶数より，p^2 は偶数である。

p^2 が偶数かつ p は自然数より，p は正の偶数である。

これは p と q が互いに素であることと矛盾する。

よって，$\sqrt{2}$ は無理数である。

(1)　（別解）

背理法を用いて示す。

$\sqrt{2}$ が有理数と仮定すると，$\sqrt{2}$ は自然数 p，q を用いて，

$$\sqrt{2}=\frac{q}{p}$$

と表せる。両辺 2 乗して整理すると，

$$2=\frac{q^2}{p^2}$$

$$2p^2=q^2$$

素因数 2 の個数に注目すると，左辺は奇数個，右辺は偶数個の素因数 2 をもつため矛盾する。

よって，$\sqrt{2}$ は無理数である。

(2)　n の偶奇で場合分けする。

(i)　n が偶数のとき，非負整数 m を用いて，$n=2m$ と表せる。このとき，二項定理より，

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+1)^n&=(\sqrt{2}+1)^{2m}\\&=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_k\,(\sqrt{2})^k\cdot 1^{2m-k}\\&=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_k\,(\sqrt{2})^k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)^n&=(\sqrt{2}-1)^{2m}\\&=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_k\,(\sqrt{2})^k\cdot(-1)^{2m-k}\\&=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_k\,(\sqrt{2})^k\cdot(-1)^{2m}\cdot(-1)^{-k}\\&=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_k\,(\sqrt{2})^k\cdot(-1)^k\\&=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_k\,(-\sqrt{2})^k\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}&(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n\\&=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_k\,(\sqrt{2})^k+\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_k\,(-\sqrt{2})^k\\&=\sum_{k=0}^{2m}{}_{2m}\mathrm{C}_k\,\{(\sqrt{2})^k+(-\sqrt{2})^k\}\\&={}_{2m}\mathrm{C}_0\,\{(\sqrt{2})^0+(-\sqrt{2})^0\}\\&\quad+{}_{2m}\mathrm{C}_1\,\{(\sqrt{2})^1+(-\sqrt{2})^1\}\\&\quad+\cdots\\&\quad+{}_{2m}\mathrm{C}_{2m-1}\,\{(\sqrt{2})^{2m-1}+(-\sqrt{2})^{2m-1}\}\\&\quad+{}_{2m}\mathrm{C}_{2m}\,\{(\sqrt{2})^{2m}+(-\sqrt{2})^{2m}\}\\&=2\{{}_{2m}\mathrm{C}_0\,(\sqrt{2})^0+{}_{2m}\mathrm{C}_2\,(\sqrt{2})^2+\cdots+{}_{2m}\mathrm{C}_{2m}\,(\sqrt{2})^{2m}\}\\&=2\sum_{k=0}^{m}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k}\,(\sqrt{2})^{2k}\\&=2\sum_{k=0}^{m}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k}\,2^k\\&=\sum_{k=0}^{m}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k}\,2^{k+1}\end{aligned}$$

より，これは整数である。

(ii) n が奇数のとき，非負整数 m を用いて，$n=2m+1$ と表せる。このとき，二項定理より，

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+1)^n &= (\sqrt{2}+1)^{2m+1}\\ &= \sum_{k=0}^{2m+1} {}_{2m+1}\mathrm{C}_k\,(\sqrt{2})^k\cdot 1^{2m+1-k}\\ &= \sum_{k=0}^{2m+1} {}_{2m+1}\mathrm{C}_k\,(\sqrt{2})^k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)^n &= (\sqrt{2}-1)^{2m+1}\\ &= \sum_{k=0}^{2m+1} {}_{2m+1}\mathrm{C}_k\,(\sqrt{2})^k\cdot(-1)^{2m+1-k}\\ &= \sum_{k=0}^{2m+1} {}_{2m+1}\mathrm{C}_k\,(\sqrt{2})^k\cdot(-1)^{2m}\cdot(-1)^{-k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{2m+1} {}_{2m+1}\mathrm{C}_k\,(\sqrt{2})^k\cdot(-1)^{k-1}\\ &= -\sum_{k=0}^{2m+1} {}_{2m+1}\mathrm{C}_k\,(-\sqrt{2})^k\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}&(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n\\ &= \sum_{k=0}^{2m+1} {}_{2m+1}\mathrm{C}_k\,(\sqrt{2})^k - \sum_{k=0}^{2m+1} {}_{2m+1}\mathrm{C}_k\,(-\sqrt{2})^k\\ &= \sum_{k=0}^{2m+1} {}_{2m+1}\mathrm{C}_k\,\{(\sqrt{2})^k-(-\sqrt{2})^k\}\\ &= {}_{2m+1}\mathrm{C}_0\,\{(\sqrt{2})^0-(-\sqrt{2})^0\}\\ &\quad + {}_{2m+1}\mathrm{C}_1\,\{(\sqrt{2})^1-(-\sqrt{2})^1\}\\ &\quad +\cdots\\ &\quad + {}_{2m+1}\mathrm{C}_{2m}\,\{(\sqrt{2})^{2m}-(-\sqrt{2})^{2m}\}\\ &\quad + {}_{2m+1}\mathrm{C}_{2m+1}\,\{(\sqrt{2})^{2m+1}-(-\sqrt{2})^{2m+1}\}\\ &= 2\{{}_{2m+1}\mathrm{C}_1\,(\sqrt{2})^1+{}_{2m+1}\mathrm{C}_3\,(\sqrt{2})^3\\ &\qquad\qquad +\cdots+{}_{2m+1}\mathrm{C}_{2m+1}\,(\sqrt{2})^{2m+1}\}\\ &= 2\sum_{k=0}^{m} {}_{2m+1}\mathrm{C}_{2k+1}\,(\sqrt{2})^{2k+1}\\ &= 2\sum_{k=0}^{m} {}_{2m+1}\mathrm{C}_{2k+1}\,2^k\sqrt{2}\\ &= \sqrt{2}\sum_{k=0}^{m} {}_{2m+1}\mathrm{C}_{2k+1}\,2^{k+1}\end{aligned}$$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{m} {}_{2m+1}\mathrm{C}_{2k+1}\,2^{k+1}$ が自然数であることと (1) より，これは無理数である。

(i), (ii) より，求める必要十分条件は，

　　n が偶数であること

である。

(2) (別解)

すべての自然数 n について，

$$\begin{cases}(1+\sqrt{2})^n = x_n+y_n\sqrt{2}\\ (1-\sqrt{2})^n = x_n-y_n\sqrt{2}\end{cases}\quad\cdots②$$

を満たす自然数 x_n，y_n が存在することを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき，

$$\begin{cases}(1+\sqrt{2})^1 = 1+1\cdot\sqrt{2}\\ (1-\sqrt{2})^1 = 1-1\cdot\sqrt{2}\end{cases}$$

より，$x_1=y_1=1$ であり，条件を満たす。

(ii) $n=k$（k は自然数）のとき，

$$\begin{cases}(1+\sqrt{2})^k = x_k+y_k\sqrt{2}\\ (1-\sqrt{2})^k = x_k-y_k\sqrt{2}\end{cases}$$

を満たす自然数 x_k，y_k が存在すると仮定する。$n=k+1$ のとき，

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^{k+1} &= (1+\sqrt{2})^k(1+\sqrt{2})\\ &= (x_k+y_k\sqrt{2})(1+\sqrt{2})\\ &= (x_k+2y_k)+(x_k+y_k)\sqrt{2}\\ (1-\sqrt{2})^{k+1} &= (1-\sqrt{2})^k(1-\sqrt{2})\\ &= (x_k-y_k\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\\ &= (x_k+2y_k)-(x_k+y_k)\sqrt{2}\end{aligned}$$

より，

$$\begin{cases}x_{k+1} = x_k+2y_k\\ y_{k+1} = x_k+y_k\end{cases}$$

とすると，これらは自然数であり，

$$\begin{cases}(1+\sqrt{2})^{k+1} = x_{k+1}+y_{k+1}\sqrt{2}\\ (1-\sqrt{2})^{k+1} = x_{k+1}-y_{k+1}\sqrt{2}\end{cases}$$

となり，$n=k+1$ のときも成り立つ。

以上より，すべての自然数 n について ② を満たす自然数 x_n，y_n が存在することが示される。以下，n の偶奇で場合分けする。

・ n が偶数のとき，

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n &= (\sqrt{2}+1)^n+(1-\sqrt{2})^n\\ &= (x_n+y_n\sqrt{2})+(x_n-y_n\sqrt{2})\\ &= 2x_n\end{aligned}$$

$2x_n$ は自然数より，$(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n$ は整数である。

・ n が奇数のとき，

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n &= (\sqrt{2}+1)^n-(1-\sqrt{2})^n\\ &= (x_n+y_n\sqrt{2})-(x_n-y_n\sqrt{2})\\ &= 2y_n\sqrt{2}\end{aligned}$$

$2y_n$ は自然数かつ (1) より，$(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n$ は無理数である。

以上より，求める必要十分条件は，

　　n が偶数であること

である。

$\boxed{4}$　$0<r<1$ とする。表が出る確率が r，裏が出る確率が $1-r$ の硬貨を投げ，表が出た場合は白玉を 2 つ横並びに置き，裏が出た場合は黒玉を 1 つ置く。この要領で硬貨を繰り返し投げ，左から右に 1 列になるように白玉と黒玉を順に並べていく。例えば，3 回硬貨を投げ，結果が順に「裏，表，表」であれば，左から順に「黒，白，白，白，白」と 5 つの玉が並ぶ。n を自然数とする。$n+2$ 回硬貨を投げたとき，左から n，$n+1$，$n+2$ 番目の玉がすべて黒である確率を p_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ とする。$n+2$ 回硬貨を投げたとき，左から 1，n，$n+1$，$n+2$ 番目の玉がすべて黒である確率を p_{n-1} を用いて表せ。

(3)　$n \geqq 3$ のとき，p_n を p_{n-2}，p_{n-1} を用いて表せ。

(4)　p_n を求めよ。

(2026 年度　九州大学　文系　前期日程)

(1)　3 回硬貨を投げたとき，左から 1 番目，2 番目，3 番目が黒となるのは，結果が順に「裏，裏，裏」となるときであるから，

$$p_1=(1-r)^3$$

4 回硬貨を投げたとき，左から 2 番目，3 番目，4 番目が黒となるときを考える。

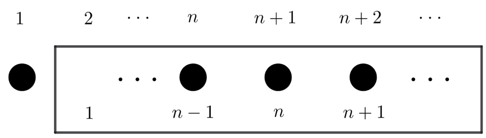
1 回目に表が出た場合，左から 2 番目は白となるため不適。よって，1 回目は裏である。

2 番目，3 番目，4 番目がすべて黒となるから，残り 3 回も裏である。

以上より，結果が順に「裏，裏，裏，裏」のときであるから，

$$p_2=(1-r)^4$$

(2)



左から 1 番目は黒より，1 回目は裏である。

2 回目から n 回目まで硬貨を投げたときの結果は図の四角内の部分である。

四角内において左から $n-1$，n，$n+1$ 番目が黒となる確率は p_{n-1} であるから，求める確率は，

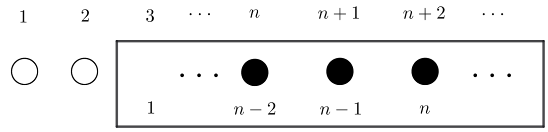
$$(1-r)p_{n-1}$$

(3)　1 回目に出た面で場合分けする。

(i)　1 回目が裏，かつ左から n，$n+1$，$n+2$ 番目がすべて黒である確率は，(2) より，

$$(1-r)p_{n-1}$$

(ii)



1 回目が表，かつ左から n，$n+1$，$n+2$ 番目がすべて黒である確率を考える。

2 回目から n 回目まで硬貨を投げたときの結果は図の四角内の部分である。

四角内において左から $n-2$，$n-1$，n 番目が黒となる確率は p_{n-2} であるから，この確率は，

$$rp_{n-2}$$

以上より，$n \geqq 3$ のとき，

$$p_n=(1-r)p_{n-1}+rp_{n-2}\cdots①$$

(4) ① の n を $n+2$ に置き換えると，$n \geqq 1$ のとき，

$$p_{n+2} = (1-r)p_{n+1} + rp_n \cdots ②$$

② より，

$$\begin{cases} p_{n+2} - p_{n+1} = -r(p_{n+1} - p_n) & \cdots ③ \\ p_{n+2} + rp_{n+1} = p_{n+1} + rp_n & \cdots ④ \end{cases}$$

$p_1 = (1-r)^3$，$p_2 = (1-r)^4$ と ③ より，

$$\begin{aligned} p_{n+1} - p_n &= (p_2 - p_1)(-r)^{n-1} \\ &= \{(1-r)^4 - (1-r)^3\}(-r)^{n-1} \\ &= (1-r)^3(-r)^n \cdots ⑤ \end{aligned}$$

$p_1 = (1-r)^3$，$p_2 = (1-r)^4$ と ④ より，

$$\begin{aligned} p_{n+1} + rp_n &= p_2 + rp_1 \\ &= (1-r)^4 + r(1-r)^3 \\ &= (1-r)^3 \cdots ⑥ \end{aligned}$$

⑤ − ⑥ より，

$$-(1+r)p_n = (1-r)^3(-r)^n - (1-r)^3$$

$-(1+r) \neq 0$ より，

$$p_n = \frac{(1-r)^3\{1-(-r)^n\}}{1+r}$$